

# SIMULACION NUMERICA POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO . UTILIZACION DE ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS PARABOLICOS.

F.G. Benitez E. Alarcón

Cátedra de Estructuras  
E.T.S. Ing. Industriales  
Universidad Politécnica de Madrid

**Resumen.** Se presenta en esta comunicación el tratamiento de problemas de potencial en sistemas bidimensionales, haciendo uso de la discretización de su contorno o frontera mediante elementos parabólicos tanto en geometría como en las variables de campo. Se estudian las ventajas frente al uso de elementos isoparamétricos lineales dentro de la teoría del potencial. Se presenta también un estudio sobre las zonas singulares a que dan lugar los elementos parabólicos degenerados.

## INTRODUCCION

El Método de las Ecuaciones Integrales de Contorno constituye una herramienta útil y poderosa para la resolución numérica de problemas que impliquen condiciones de contorno. Con este propósito se le está, en los últimos años, dando considerable importancia dentro del área de la física-matemática, debido a las serias ventajas que presenta frente a los métodos que implican la discretización completa del dominio analizado. En efecto, una de las más interesantes resulta ser la reducción considerable que se alcanza en los conjuntos de ecuaciones del comportamiento frente a los sistemas obtenidos en métodos de "dominio" así como también la disminución en el volumen de datos necesarios requeridos para la resolución del problema.

Esta comunicación, así como las distintas referencias consignadas ponen en evidencia lo establecido, siendo su propósito el presentar dentro del campo de la teoría del potencial la implementación de estos procesos numéricos en interpolación cuadrática bidimensional tanto en geometría como en las funciones de aproximación de las variables que influyen en el comportamiento del problema analizado; así como el estudio de los campos de singularidades presentados en la utilización de los elementos discretizadores.

## FORMULACION ELEMENTOS DE CONTORNO

Sea un dominio  $\bar{D} = D \cup \partial D$  sobre el que se encuentran impuestas condiciones sobre la superficie  $\partial D$ . Si se define por  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  dos funciones escalares en el continuo finito  $\bar{D}$  simplemente conexo.

El Teorema de Green establece:

$$\int_D (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \int_{\partial D} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (1)$$

donde  $n$  es la normal externa al dominio en  $\partial D$ .

Para funciones  $\phi$  que cumplan las condiciones de armonicidad  $\nabla^2 \phi = 0$  y funciones  $\psi$  que verifiquen las soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \psi(x, y) + \Delta(x, y) = 0 \quad (2)$$

donde  $\Delta(x, y)$  = función Delta de Dirac.

La expresión (1) adquiere la forma:

$$\phi(x) + \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial c(x, y)}{\partial n} ds = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n} ds \quad (3)$$

donde  $x$  e  $y$  verifican:  $x \in D$ ,  $y \in \partial D$ .

Haciendo tender el punto  $x \in \bar{D}$  al contorno:  $x \rightarrow \partial D$ ; la ecuación integral (3) presenta la forma:

$$c(x) \phi(x) + \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial c(x, y)}{\partial n} ds = \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n} ds \quad (4)$$

donde  $c(x)$  es una función que depende de la geometría de la superficie del dominio analizado y corresponde a los valores principales de Cauchy de las integrales que aparecen en ambos miembros de la expresión (3).

Los métodos de contorno en teoría del potencial se reducen por consiguiente a la integración numé-

rica de dicha ecuación sin más que definir la función  $\psi$  según se trate de analizar un problema - bidimensional o tridimensional y cuya expresión la definen:

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(x, y)}$$

$$\text{ó } \psi_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(x, y)}$$

que corresponden a las soluciones bi-tridimensionales de la ecuación de Laplace (2).

### PROCEDIMIENTOS NUMERICOS

Para la implementación numérica de la ecuación integral obtenida en (4), se debe primero realizar una discretización de la superficie  $\partial D$  de  $\bar{D}$  en un número de elementos.

Para el caso que nos ocupa  $\bar{D} \in E^2$  y, por consiguiente,  $\partial D$  al representar un contorno de dominio bidimensional podrá ser discretizado en elementos monodimensionales definidos por dos o más nodos, dependiendo de la interpolación establecida para la aproximación de la geometría: lineal, cuadrática o de ordenes superiores.

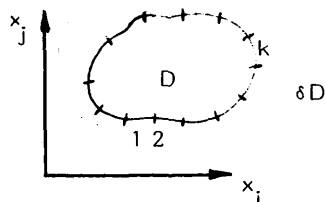


Fig. 1. Discretización de  $\partial D$  por elementos de contorno.

Las coordenadas cartesianas  $x_i^\alpha$  de cada nodo son especificaciones conocidas, de tal manera - que, las coordenadas cartesianas de un punto nodal de un elemento vendrán dadas, en coordenadas naturales por:

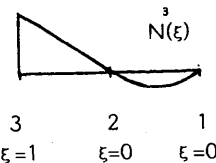
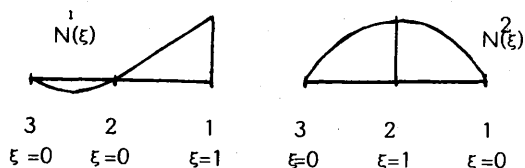
$$x_i(\xi) = N^\alpha(\xi) x_i^\alpha$$

Para el caso particular de definición parabólica:

$$N^1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \quad N^2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N^3(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$$

Las funciones  $N^\alpha(\xi)$  son conocidas como funciones de forma en coordenadas naturales  $\xi$ , mostrándose en la figura adjunta sus representaciones para la integración parabólica



Análogamente a la aproximación establecida para la geometría, las funciones  $\phi$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv q$  definidas en cualquier punto del contorno, pueden interpolarse a partir de los valores de ellas en cada uno de los nodos haciendo también uso de las funciones de forma como:

$$\phi(\xi) = N^\alpha(\xi) \cdot \phi_i^\alpha$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi) = q(\xi) = N^\alpha(\xi) \cdot q_i^\alpha$$

donde  $\phi_i^\alpha$  y  $q_i^\alpha$  son los valores nodales de las funciones  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente.

Basandose en la discretización establecida, la ecuación (4) quedaría como un sistema de ecuaciones integrales; para cada nodo, de la forma:

$$c(i) \cdot \phi(i) + \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \phi_k \frac{\partial \psi}{\partial n}(\xi) ds_k = \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \psi_k(i) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi) ds_k \quad (5)$$

donde  $i \in \partial D, k \in \partial D$

### IMPLICACIONES DISCRETIZACION

Para el caso de discretización del contorno en elementos isoparamétricos cuadráticos; la expresión (5) se transformará en:

$$c(i) \cdot \phi(i) + \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \phi_k \frac{\partial \psi}{\partial n}(\xi) ds_k = \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} \psi_k(i) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi) ds_k \quad (6)$$

y definiendo por:

$$A_{ik} = \int_{\partial D_k} \frac{\partial \psi}{\partial n}(\xi) N_i ds_k \quad (6.a.)$$

$$B_{ik} = \int_{\partial D_k} \psi_k(i) N_i ds_k \quad (6.b.)$$

se obtiene:

$$c(i) \cdot \phi(i) + \sum_{k=1}^N [A_{ik} A_{kj}] \begin{Bmatrix} \phi_k^{(k-1)} \\ \phi_k^{(k)} \\ \phi_k^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N [B_{ik} B_{kj}] \begin{Bmatrix} q_k^{(k-1)} \\ q_k^{(k)} \\ q_k^{(k+1)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde  $\phi_i(j)$  y  $q_i(j)$  representan el potencial y el flujo respectivamente en el nodo  $j$  del elemento  $i$ .

Como el número de ecuaciones que deberá ser planteado coincide con el número de nodos de la discretización, el sistema a resolver presenta la forma:

$$\underline{C} \cdot \underline{\phi} + \underline{A} \cdot \underline{\phi} = \underline{B} \cdot \underline{q}$$

Coeficientes  $A_i$  y  $B_i$

De (6.a.), expresando el diferencial de longitud  $ds_k$  en función del Jacobiano  $J(\xi)$  de la transformación, obtenido a partir de su expresión en coordenadas polares y tomando como origen del sistema de referencia del nodo 1 desde el que se integra; se obtiene según se muestra en la figura:

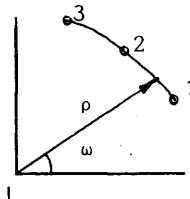


Fig. 3. Integración polar sobre un elemento.

$$A_i = \int_{\partial D_k} N_i \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_k ds_k = - \int N_i(\xi) d\omega$$

y expresando  $d\omega$  en función de la coordenada natural  $d\xi$  y de las funciones de forma:

$$d\omega = \frac{(\sum N_i y_i)(\sum N_i x_i) - (\sum N_i x_i)(\sum N_i y_i)}{(\sum N_i x_i)^2 + (\sum N_i y_i)^2} d\xi$$

se alcanza:

$$A_i = - \int_{\partial D_k} N_i(\xi) \frac{(\sum N_i y_i)(\sum N_i x_i) - (\sum N_i x_i)(\sum N_i y_i)}{(\sum N_i x_i)^2 + (\sum N_i y_i)^2} d\xi \quad (10)$$

Expresión válida para cualquier tipo de elemento (parabólico, cúbico, etc.).

Análogamente y para la expresión (6.b.), en cartesianas se consigue:

$$B_i = \int_{\partial D_k} N_i(\xi) \ln \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\xi^2}{2} a + \xi b + x_2 - x_1\right]^2 + \left[\frac{\xi^2}{2} c + \xi d + y_2 - y_1\right]^2}} d\xi \quad (11)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= x_1 - 2x_2 + x_3 & c &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ b &= \frac{x_1 - x_3}{2} & d &= \frac{y_1 - y_3}{2} \end{aligned}$$

y  $x_i, y_i$  representan las coordenadas de los nodos  $i$  ( $i=1,2,3$ ) que constituyen cada elemento.

## INTEGRACIONES SOBRE EL PROPIO ELEMENTO

En la ecuación (7) aparecen términos ( $A_i$  y  $B_i$ ) que corresponden a integraciones que se efectúan desde un nodo a su mismo elemento. Es estos casos las integraciones deben ser realizadas analíticamente, debido a las singularidades que presentan en la integración numérica.

La integración analítica de la expresión (10) da lugar a:

$$A_i = - \int_{-1}^1 N_i(\xi) \frac{\beta}{(\xi + \alpha)^{2+\beta}} d\xi$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  dependen del nodo del elemento desde el que se realiza la integración (nodo tipo 1, 2 ó 3), dando lugar a:

$$A_2 = \beta [I_2 - I_0]$$

$$A_1 = - \frac{\beta}{2} [I_2 + I_1] \quad A_3 = \frac{\beta}{2} [I_1 - I_2]$$

y donde:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\beta} \left[ \arctg \frac{\alpha+1}{\beta} - \arctg \frac{\alpha-1}{\beta} \right] \\ I_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^2} + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \arctg \frac{\alpha-1}{\beta} - \arctg \frac{\alpha+1}{\beta} \right] \\ I_2 &= 2 + \left( \frac{\alpha}{\beta} - \beta \right) \arctg \frac{\alpha+1}{\beta} - \arctg \frac{\alpha-1}{\beta} + \ln \frac{\alpha-1}{1 + \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^2} \end{aligned}$$

En contrapartida, la integración de la expresión (11), no tiene fácil primitiva, debiendo en general ser calculada numéricamente, por descomposición de ella en dos subgrupos de integrales del tipo:

$$B_i = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi + \int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta$$

## ZONAS DE SINGULARIDAD

Cabría plantearse la posibilidad del análisis de contornos lineales geoméricamente haciendo uso de interpolaciones cuadráticas, a fin de demostrar si la posibilidad de utilización de elementos parabólicos degenerados (lineales) es factible.

De la expresión (10), para el caso de elementos lineales, e integración desde el nodo 1:

$$A_1 = \int_{-1}^1 N_1 \frac{y_2 x_3 - x_2 y_3}{\left(\xi \frac{a}{2} - x_2\right)^2 + \left(\xi \frac{c}{2} - y_2\right)^2} \cdot \frac{1}{2} d\xi$$

La integral exige un tratamiento cuidadoso para valores nulos del denominador. Esto ocurre cuando, encontrándonos en elementos lineales en geometría, se verifique

$$\xi = \frac{2}{\frac{x_3}{x_2} - 2} = \frac{2}{\frac{y_3}{y_2} - 2}$$

y como  $\xi$  varía en el campo:  $-1 \leq \xi \leq 1$  se verificará.

$$\left| \frac{2x_2}{x_3 - 2x_2} \right| \leq 1$$

o, análogamente, cuando  $x_2 \leq \frac{x_3}{4}$

Es decir, existirá problema de singularidad cuando el nodo central del elemento se encuentra geométricamente en una zona comprendida a una distancia de  $1/4$  del nodo 1.

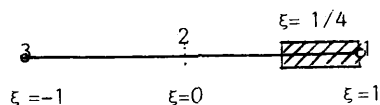


Fig.4. Zona de singularidad Geométrica.

Similarmente se podría haber realizado el estudio de las integraciones desde el nodo 3, dando lugar a la restricción  $x_2 \leq x_1/4$ .

Del estudio de las integraciones desde nodos del tipo 2 se deduce la no singularidad de las integrales.

Por analogía en las  $A_i$ , el análisis de los coeficientes  $B_i$  ratifican las mismas restricciones obtenidas para  $A_i$ , de modo que resumiendo, se puede establecer que fuera de las zonas cercanas,  $1/4$  de la longitud total del elemento de los extremos, es donde debe colocarse geométricamente la posición del nodo 2 para realizar una discretización correcta, salvando las zonas de singularidades geométricas posibles.

#### IMPLEMENTACION NUMERICA

A fin de ratificar práctica y experimentalmente el desarrollo teórico expuesto, se ha elaborado un programa capaz de abordar problemas en potencial con capacidad para una discretización de 100 elementos de contorno y 100 puntos internos ejecutándose para distintos problemas clásicos.

#### ALGUNOS EJEMPLOS DE PROBLEMAS

##### 1.--Flujo de calor en placa cuadrada.

Sea la placa cuadrada sobre la que se encuentran definidas las siguientes condiciones de temperatura y aislamiento.

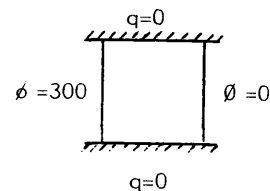


Fig.5. Placa cuadrada. Condiciones de contorno.

Identificando a la variable  $\phi$  como asociada a la temperatura y  $q$  al flujo de calor.

En este ejemplo el contorno discretizado en elementos lineales o parabólicos degenerados representará exactamente al real, por lo que dependiendo de la interpretación establecida (distribución de las variables  $\phi$  y  $q$ ) sobre el contorno se obtendrán resultados más o menos aproximados.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en una discretización parabólica frente a discretizaciones lineales.

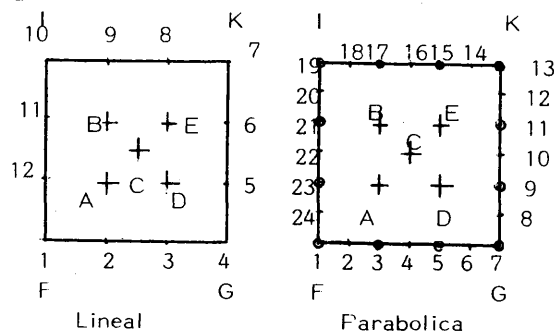


Fig. 6 Discretización empleada

TABLA1. Resultados placa cuadrada.

NODO	TEORIA	D.LINEAL	D. PARABOLICA
A	200	200.001	200.00003
B	200	200.001	200.00003
C	150	150.000	150.00002
D	100	100.000	100.00002
E	100	100.000	100.00002
F	50	49.9991	50.00020
G	50	49.99916	50.00018
H	50	49.99988	50.00015
I	50	50.00002	50.00017

##### 2.--Temperatura en placa cuadrada.

Para el ejemplo presentado en la Fig. 7 (Problema de Newmann), de placa cuadrada, dicho problema presenta indeterminación en la aplicación

directa de las condiciones de contorno, puesto que existen infinitas distribuciones posibles de  $\phi$ . - Por lo que es preciso fijar el valor de la función en un punto para que la distribución sobre todo el dominio quede así fijada

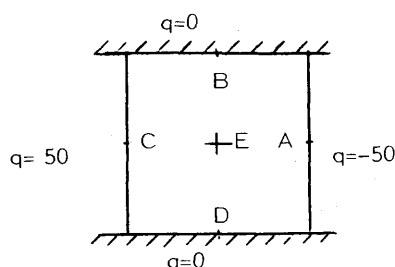


Fig.7. Temperatura en Placa Cuadrada.

TABLA2 .- Resultados placa cuadrada

NODO	TEORIA	Soluc.Fijando A LINEAL	Soluc.Fijando A PARABOLICO
A	0	0	0
B	150	149.9900	149.99990
C	300	299.9900	299.99990
D	150	150.0000	150.00000
E	150	149.9900	149.99992

Las discretizaciones utilizadas tanto para la implementación lineal como parabólica son las mostradas en la Fig. 6.

### 3.--Torsión en Barra Elíptica.

La torsión en una barra elíptica se reduce según Saint Venant al estudio de la función potencial de alabeo  $\phi = -\frac{1}{4}xy$ , donde  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -x \cdot y$   $\frac{4}{\sqrt{a}} \frac{2}{y} - \frac{4}{\sqrt{b}} \frac{2}{x}$  donde a y b representan los ejes de la elipse.

La resolución de este problema por el M.E.C. se reduce a discretizar un cuadrante de la sección elíptica de la barra y estudiar su comportamiento con las condiciones de contorno establecidas en la figura adjunta.

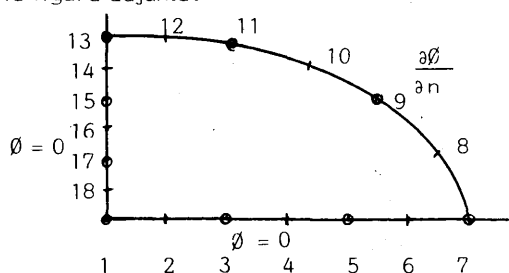


Fig. 8 Cuadrante de barra elíptica

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla adjunta confrontados con los teóricos.

TABLA 3.- Resultados Barra Elíptica.

NODO	TEORIA $\phi$	APROX. NUMERICA $\phi$
8	-12.49	-12.833
9	-14.84	-15.144
10	-12.00	-12.068
11	-8.00	-8.071
12	-3.94	-3.963
A	-0.833	-0.842
B	-3.333	-3.370
C	-7.50	-7.599
D	-3.333	-3.398
E	-3.333	-3.361

### CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Con esta comunicación se ha pretendido poner de manifiesto la importancia de los métodos de funciones de Green para la resolución numérica de problemas potenciales, demostrando la aproximación y eficiencia conseguida en ejemplos de solución teórica conocida; haciendo resaltar también la importancia que conlleva el análisis de las singularidades de los integrandos en las ecuaciones establecidas, así como el campo de discretización para la resolución de los problemas planteados.

El diseño de los programas de computador para el análisis del método de las ecuaciones integrales de contorno es un tema complejo que obviarnos en esta comunicación pero al que debe ser dedicada gran atención, debido a que es la eficacia de las rutinas para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones de contorno, y para el cálculo de los puntos internos las que establecen la operatividad y coste del funcionamiento del programa.

### REFERENCIAS

- Alarcón, E, Martín, A, Paris F (1978) "Boundary Elements in Potencial and Elasticity Theory" Communication Congres Prends in Computerize Estructural Analisis and Syntesis. Washington
- Alarcón, E, Martín A, Paris, F; (1978). Some Minor Problem with B.I.E.M." Congres - Applied Numerical Modelling. Madrid

- Alarcón E, Martín A, París F (1978). "El Método de las Ecuaciones Integrales Singulares en la Mecánica de los Medios Continuos y la Teoría del Potencial". 75 aniversario R.S. E. F. y Q. Madrid
- Brebbia, C.A., Dominguez, J (1977). "Boundary Elements Method for Potencial Problems". Appl. Math. Modelling. Vol 1.
- Jawson y Symm (1977). "Integral Methods in Potencial Theory and Elastostatics". Academic Press.
- París, F (1979) "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". Tesis. E.T.S.I.I. Madrid.
- Stroud, Am y Secrest, D "Gaussian Quadrature Formulas". Prentice Hall. 1966
- Watson, J.O. (1979) "Advanced Implementation of the Boundary Element Method for two-and three-dimensional Elastostatics". Barnejee Developments Science Publishers LTD. London. m 31-63

#### SUMMARY

This paper presents a B.I.E.M. for potential -- theory, using in the discretization a completely isoparametric parabolic formulation; that is, the field variable, its first derivative and the boundary domain are interpolated using second order - piecewise polinomic. Several results are presented and comparison is made with other simpler formulations. Also treated is the possibility of modelling singular behavior by moving the midside node of selected elements.